8. Интерактивная лекция-визуализация. Использование статистики, теории вероятности, элементов комбинаторики для выявления закономерностей функционирования и поведения сложных социальных и экономических систем.

Комбинаторика- это область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры (карты, кости). Широко были распространены лотереи. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр: сколькими способами можно получить данное число очков, бросая 2 или 3 кости или сколькими способами можно получить 2-ух королей в некоторой карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр являлись движущей силой в развитии комбинаторики и далее в развитии теории вероятностей.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Он составил таблицы (числа способов выпадения k очков на r костях). Однако, он не учел, одна и та же сумма очков может выпасть различными способами, поэтому его таблицы содержали большое количество ошибок.

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские математики Блез Паскаль и Ферма. Исходным пунктом их исследований были так же проблемы азартных игр.

Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Я. Бернулли, Г. Лейбница, Л. Эйлера. Однако, и в их работах основную роль играли приложения к различным играм.

Сегодня комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний, для составления планов производства и реализации продукции и т.д.

2. Общие правила комбинаторики.

Правило суммы: Если некоторый объект А может быть выбран m способами, а объект В- k способами, то объект «либо А, либо В» можно выбрать m+k способами.

Примеры:

1. Допустим, что в ящике находится n разноцветных шаров. Произвольным образом вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: n способами.

Распределим эти n шариков по двум ящикам: в первый- m шариков, во второй- k шариков. Произвольным образом из произвольно выбранного ящика вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Из первого ящика шарик можно вынуть m способами, из второго- k способами. Тогда всего способов m+k=n.

2. Морской семафор.

В морском семафоре каждой букве алфавита соответствует определенное положение относительно тела сигнальщика двух флажков. Сколько таких сигналов может быть?

Решение: Общее число складывается из положений, когда оба флажка расположены по разные стороны от тела сигнальщика и положений, когда они расположены по одну сторону от тела сигнальщика. При подсчете числа возможных положений применяется правило суммы.

Правило произведения: Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то пары объектов «A и B» можно выбрать m*k способами.

Примеры:

1. Сколько двузначных чисел существует?

Решение: Число десятков может быть обозначено любой цифрой от 1 до 9. Число единиц может быть обозначено любой цифрой от 0 до 9. Если число десятков равно 1, то число единиц может быть любым (от 0 до 9). Таким образом, существует 10 двузначных чисел, с числом десятков- 1. Аналогично рассуждаем и для любого другого числа десятков. Тогда можно посчитать, что существует 9 *10 = 90 двузначных чисел.

2. Имеется 2 ящика. В одном лежит m разноцветных кубиков, а в другом- k разноцветных шариков. Сколькими способами можно выбрать пару «Кубик-шарик»?

Решение: Выбор шарика не зависит от выбора кубика, и наоборот. Поэтому, число способов, которыми можно выбрать данную пару равно m*k.

3. Генеральная совокупность без повторений и выборки без повторений.

Генеральная совокупность без повторений- это набор некоторого конечного числа различных элементов $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

Пример: Набор из n разноцветных лоскутков.

Выборкой объема k (k n) называется группа из m элементов данной генеральной совокупности.

Пример: Пестрая лента, сшитая из m разноцветных лоскутков, выбранных из данных n.

Размещениями из n элементов по k называются такие выборки, которые содержат по k элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, и отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

- число размещений из n по k.

Число размещений из n по k можно определить следующим способом: первый объект выборки можно выбрать n способами, далее второй объект можно выбрать n-1 способом и т.д.

$$\mathbf{A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}$$

Преобразовав данную формулу, имеем:

$$\mathbf{A_n^k} = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}, \text{где } \mathbf{n}! = \mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \text{ (называется } \mathbf{n} - \text{факториал).}$$

Следует помнить, что **0!=1.**

Примеры:

1. В первой группе класса А первенства по футболу участвует 17 команд. Разыгрываются медали: золото, серебро и бронза. Сколькими способами они могут быть разыграны?

Решение: Комбинации команд-победителей отличаются друг от друга составом и порядком следования элементов, т.е. являются размещениями из 17 по 3. $A_{17}^3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 15 \cdot 16 \cdot 17 = 4080$

2. Научное общество состоит из 25-ти человек. Необходимо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Комбинации руководящего состава общества отличаются друг от друга составом и порядком следования элементов, т.е. являются размещениями из 25 по 4.

$$A_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)!} = \frac{25!}{21!} = 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 = 303600$$

Перестановками без повторений из n элементов называются размещения без повторений из n элементов по n, т.е. размещения отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

- число перестановок.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Примеры:

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что они должны состоять из различных цифр?

Решение: Имеем перестановки из 5 элементов.

$$P_n = 5! = 120$$

2. Сколькими способами можно собрать 6 разноцветных лоскутков в пеструю ленту?

Решение: Имеем перестановки из 6 элементов.

$$P_n = 6! = 720$$

Сочетаниями без повторений из n элементов по k называются такие выборки, которые содержат по k элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, и отличаются друг от друга только составом элементов.

-число сочетаний из n по k

Элементы каждого из сочетаний можно расставить способами. Тогда

Примеры:

1. Если в полуфинале первенства по шахматам участвует 20 человек, а в финал выходят лишь трое, то сколькими способам и можно определить эту тройку?

Решение: В данном случае порядок, в котором располагается эта тройка, не существенен. Поэтому тройки, вышедшие в финал, являются сочетаниями из 20 по 3.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)! \cdot 3!} = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3} = 1140$$

2. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов из десяти человек на конференцию?

Решение: В данном случае порядок, в котором располагается эта тройка, не существенен. Поэтому тройки делегатов являются сочетаниями из 10 по 3.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

Конспект:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \qquad P_n = n!$$

4. Применение графов (схем) при решении комбинаторных задач.

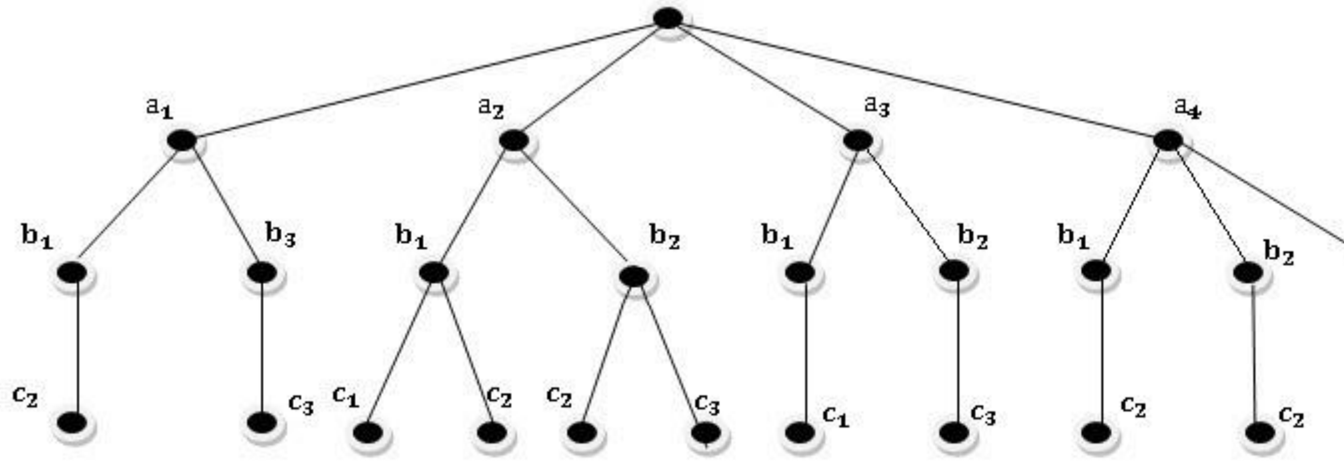
В случае, когда число возможных выборов на каждом шагу зависит от того, какие элементы были выбраны ранее, можно изобразить процесс составления комбинаций в виде «дерева». Сначала из одной точки проводят столько отрезков, сколько различных выборов можно сделать на первом шагу. Из конца каждого отрезка проводят столько отрезков, сколько можно сделать выборов на втором шагу, если на первом шагу был выбран данный элемент и т.д.

Задача:

При составлении команд космического корабля учитывается вопрос и психологической совместимости участников путешествия. Необходимо составить команду космического корабля из 3 человек: командира, инженера и врача. На место командира есть 4 кандидата: a_1, a_2, a_3, a_4. На место инженера- 3: b_1, b_2, b_3. На место врача- 3: c_1, c_2, c_3. Проведенная проверка показала, что командир a_1 психологически совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_1 и c_3. Командир a_2 - с инженерами b_1 и b_2. и всеми врачами. Командир a_3 - с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1 и c_3. Командир a_4-со всеми инженерами и врачом c_2. Кроме того, инженер b_1 не совместим с врачом c_3, b_2- с врачом c_1 и b_3- с врачом c_2. Сколькими способами при этих условиях может быть составлена команда корабля?

Решение:

Составим соответствующее «дерево».



Ответ: 10 комбинаций.

Такое дерево является графом и применяется для решения комбинаторных задач.